MUSTERLÖSUNG
FÜR DIE U-BOOT AUFGABEN

Aufgabe 1.) Rotes U-Boot

Gegeben:

Koordinaten U_r (2 | -1,5 | -1)

Kurs $\overrightarrow{v_r} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Frage: *Fährt das rote U-Boot an der Stelle A (-7 | -6 | -1,7) vorbei, wenn es seinen Kurs beibehält?*

Lösung:
Stelle eine Geradengleichung für den Weg des roten U-Bootes auf:

$$g_r: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Liegt A auf g_r? Setze dazu $g_r = A$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ -1{,}7 \end{pmatrix}$$

erste Zeile: $2 + r \cdot (-1) = \mathbf{-7}$

→ Durch Umformen ergibt sich $r = 9$

Dann $r = 9$ einsetzen in die zweite und dritte Zeile,
um zu überprüfen, ob dieses r die Gleichung löst:

zweite Zeile: $-1{,}5 + 9 \cdot (-0{,}5) = \mathbf{-6}$ ✓

dritte Zeile: $-1 + 9 \cdot (-1) = \mathbf{-10}$ $\neq \mathbf{-1{,}7}$

Die dritte Zeile ist nicht erfüllt. Das heißt A liegt nicht auf g, da kein r gefunden werden kann, das die Gleichung löst.

Antwort: *Das U-Boot kommt nicht direkt an der Stelle A vorbei.*

Aufgabe 2.) Gelbes U-Boot

Gegeben:

Koordinaten U_g (5 | 0 | 2).

Kurs $\overrightarrow{v_g} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Frage: *Kreuzt das gelbe U-Boot den Weg des roten U-Bootes, wenn beide ihren Kurs beibehalten?*

Lösung:
Stelle eine Geradengleichung für den Weg des gelben U-Bootes auf:

$$g_g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Feststellung: $\overrightarrow{v_g}$ und $\overrightarrow{v_r}$ sind keine Vielfachen voneinander.

Setze daher im nächsten Schritt $g_g = g_r$, um zu überprüfen, ob sich die beiden Geraden, die den Weg der U-Boote beschreiben, schneiden:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Löse dann das sich daraus ergebende Lineare Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{aligned} 5 + 0{,}5s &= 2 - r \\ 0 + 4s &= -1{,}5 - 0{,}5r \\ 2 + 3s &= -1 - r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0{,}5s + r &= -3 && \Big| \cdot (-8) && \Big| \cdot (-6) \\ 4s + 0{,}5r &= -1{,}5 \\ 3s + r &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0{,}5s + r &\;\; -3 \\ -7{,}5r &= 22{,}5 && \rightarrow r = -3 \\ -5r &= 15 && \rightarrow r = -3 \end{aligned} \Bigg\} \rightarrow \text{Es gibt genau eine Lösung.}$$

Setze $r = -3$ in g_r : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Antwort: *Der Weg der U-Boote kreuzt sich an der Stelle S (5 | 0 | 2).*

Aufgabe 3.) Lilafarbenes U-Boot

Gegeben:

Koordinaten U_l (1 | 5 | -2).

Kurs $\vec{v_l} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

<u>Frage</u>: *Kreuzt das lilafarbene U-Boot den Weg des roten U-Bootes, wenn beide ihren Kurs beibehalten?*

Lösung:

Stelle eine Geradengleichung für den Weg des lilafarbenen U-Bootes auf:

$$g_l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

<u>Feststellung</u>: $\vec{v_l}$ und $\vec{v_r}$ sind keine Vielfachen voneinander.

Setze daher im nächsten Schritt $g_l = g_r$, um zu überprüfen, ob sich die beiden Geraden, die den Weg der U-Boote beschreiben, schneiden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Löse dann das sich daraus ergebende Lineare Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{aligned} 1 &= 2 - r \\ 5 - l &= -1{,}5 - 0{,}5r \\ -2 + 7l &= -1 - r \end{aligned}$$

____

$$\begin{aligned} r &= 1 \\ -l + 0{,}5r &= -5{,}5 \\ 7l + \quad r &= 1 \end{aligned}$$

____

mit $r = 1$ folgt: $-l + 0{,}5 = -5{,}5$ → $-l = -6$ → $\underline{\boldsymbol{l = 6}}$

$7l + 1 = 1$ → $\underline{\boldsymbol{l = 0}}$

→ Es gibt keine eindeutige Lösung.

→ g_l und g_r sind windschief.

<u>Antwort</u>: *Die Wege der U-Boote kreuzen sich nicht.*

Aufgabe 4.) Grünes U-Boot

Gegeben:

Koordinaten U_{gr} (-3 | 6 | 0).

Kurs $\vec{v_{gr}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$

<u>Frage</u>: *Beschreibe seine Fahrtroute im Vergleich zum roten U-Boot.*

Lösung:

Stelle eine Geradengleichung für den Weg des grünen U-Bootes auf:

$$g_{gr}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

<u>1. Feststellung</u>: $\vec{v_{gr}}$ und $\vec{v_r}$ sind Vielfache voneinander, denn $(-3) \cdot \vec{v_r} = \vec{v_{gr}}$!

Überprüfe nun in einem nächsten Schritt, ob die Geraden irgendeinen (!) Punkt gemeinsam haben.
(Hätten sie irgendeinen Punkt gemeinsam, dann wären sie identisch.
Haben sie jedoch keinen gemeinsamen Punkt, sind sie parallel.)

<u>Zur Überprüfung:</u> Beispielsweise lässt sich der Stützvektor von g_{gr}, der ein Ortsvektor der Punktes U_{gr} (-3 | 6 | 0) ist, nie mittels der Geradengleichung von g_r darstellen. Der Punkt U_{gr} (-3 | 6 | 0), der auf g_{gr} liegt, liegt also nicht auf g_r .

<u>Erklärung dazu:</u> Man findet also NIE ein „r“, sodass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Man müsste beispielsweise für die letzte Zeile $r = -1$ wählen, damit diese erfüllt ist, denn $-1 + (-1) \cdot (-1) = -1 + 1 = 0$. Setzt man aber $r = -1$ beispielsweise in die erste Zeile ein, so stimmt die Gleichung nicht mehr:

$$2 + (-1) \cdot (-1) = 2 + 1 = 3 \quad \neq \quad -3$$

<u>2. Feststellung</u>: Die beiden Geraden haben also nicht irgendeinen Punkt gemeinsam und da ihre Richtungsvektoren aber parallel sind, bedeutet das, dass sie überhaupt keinen gemeinsamen Punkt haben.

→Mit der 1. und 2. Feststellung folgt, dass die beiden Geraden parallel sind.

<u>Antwort:</u> *Das grüne U-Boot fährt parallel zum roten U-Boot.*

Aufgabe ***.) Für ganz Schnelle

<u>Aufgabe *.) 1.)</u>**

Stößt das rote U-Boot mit dem gelben zusammen, wenn beide von ihrer jeweiligen Startposition aus gleichzeitig losfahren und ihren Kurs nicht ändern?

Lösung:

<u>Herangehensweise:</u>

Wir wissen aus den vorigen Aufgaben, dass sich die Fahrtwege (!) des roten und des gelben U-Bootes kreuzen, da sich die Geraden, die die Fahrtwege beschreiben, schneiden. Allgemein kann in einer Geradengleichung $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ der Parameter t die Fahrtdauer angeben. Man muss also überprüfen, ob sich nicht nur die Fahrtwege kreuzen, sondern ob beide U-Boote diesen Kreuzungspunkt auch zur selben Zeit passieren. Dazu schaut man sich den Parameter vor den jeweiligen Richtungsvektoren an. Man erkennt somit, dass das rote U-Boot die Stelle, an der sich die Fahrtwege kreuzen, bereits vor 3 Zeiteinheiten passiert ($t = -3$), während das gelbe U-Boot nach 0 Zeiteinheiten an der Kreuzungsstelle ist – dieses befindet sich also schon von Beginn an dort. Tatsächlich hat seine Startposition auch dieselben Koordinaten wie der Kreuzungspunkt. Da sie also zu unterschiedlichen Zeiten die Stelle passieren, an der sich die Fahrtwege kreuzen, stoßen sie nicht zusammen.

<u>Warum bedeutet $t = -3$ „vor drei Zeiteinheiten“? (Anschauliche Erklärung):</u>

Die U-Boote starten jeweils auf ihren Stützvektoren. Die Richtungsvektoren geben die Fahrtrichtung an. Braucht man bei dem roten U-Boot den Parameter $t = -3$, um zu dem Kreuzungspunkt zu gelangen, dann bedeutet das, dass man an den Stützvektor dreimal den Richtungsvektor in umgekehrter Richtung dransetzen muss, also, dass sich der Kreuzungspunkt sozusagen „hinter“ dem Startpunkt, von dem aus wir das U-Boot beobachtet haben und der durch den Stützvektor angegeben ist, liegt.

<u>Antwort:</u> *Nein, das rote U-Boot stößt nicht mit dem gelben zusammen.*

<u>Aufgabe *.) 2.)</u>**

Stößt das U_1-Boot mit den Koordinaten $U_1(0 \mid 0 \mid 4)$ und dem Kurs $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit dem U_2-Boot, das die Koordinaten $U_2(0 \mid 4 \mid 0)$ und den Kurs $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ hat, zusammen, wenn beide gleichzeitig losfahren und ihren Kurs nicht ändern?

Lösung:

<u>Herangehensweise:</u>

In einer Geradengleichung $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ kann der Parameter t die Fahrtdauer angeben.

Für den **Parameter t=1** schneiden sich die beiden Geraden, die die Fahrtwege der U-Boote beschreiben in S (0 | 4 | 4).

Das Besondere daran ist, dass sie sich dieses Mal, also im Gegensatz zu Aufgabe ***)1.), unter Verwendung <u>desselben Parameters</u> schneiden!

Das bedeutet, dass sowohl das erste U-Boot, als auch das zweite nach <u>derselben</u> Zeiteinheit (t=1) den Kreuzungspunkt passieren. Sie befinden sich also zur selben Zeit am selben Ort und treffen daher aufeinander.

<u>Antwort</u>: *Ja, sie stoßen an der Stelle S (0 | 4 | 4) zusammen.*